Université de Haute-Alsace
2022/2023
Maths Renfort CPB2
Quentin Ehret *quentin.ehret@uha.fr*

Chapitre 4 : Intégrales généralisées

Vous savez déjà intégrer des fonctions continues par morceaux (cpm) sur des segments. On va voir dans ce chapitre comment intégrer des fonctions définies sur des intervalles de type $[a, +b[$; $[a, +\infty[$; $]-\infty, b]$; $]a, b[$; etc... Une question typique à laquelle nous allons répondre est comment donner un sens à la quantité

$$\int_a^b f(t)dt$$

pour f définie sur $[a, b[$? Par exemple, on peut regarder $t \longmapsto \frac{1}{t^2}$ sur $[1, +\infty[$: comment donner un sens à l'écriture

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt?$$

Pour simplifier les notations, on prend $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, et on aura alors $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$.

1 Définitions et premières propriétés

1.1 Définition

Définition 1

Soit f continue par morceaux sur $[a, b[$.

- On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ **converge** si la quantité $\lim\limits_{x \longrightarrow b^-} \int_a^x f(t)dt$ existe et est finie. On parle alors **d'intégrale généralisée** ou **impropre** et on pose

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \longrightarrow b^-} \int_a^x f(t)dt.$$

- Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale **diverge**.

Remarque. *Si on a f est définie sur $]a, b]$, on regarde bien sûr $\lim\limits_{x \longrightarrow a^+} \int_x^b f(t)dt$.*

Exemples :

1. Que vaut $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$? On regarde donc, pour $x > 0$,

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = [\arctan(t)]_0^x = \arctan(x) - \arctan(0) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}.$$

   En effet, $\arctan(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$. On a ainsi une limite finie, et donc $I = \frac{\pi}{2}$.

2. Que vaut $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t}dt$? Soit encore $x > 0$.

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}dt = [\ln(1+t)]_0^x = \ln(x+1) - \ln(1) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

   On a donc montré que cette intégrale est divergente.

Exercice (1) : Montrer que

$$\int_0^1 \ln(t)dt \text{ converge}\,; \int_0^1 \frac{1}{t}dt \text{ diverge.}$$

1.2 Propriétés

Lorsqu'elle converge, cette nouvelle intégrale vérifie les mêmes propriétés que l'intégrale de Riemann usuelle.

Proposition 2 (Relation de Chasles)

Soit $f : [a,b[\longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction continue par morceaux et $c \in [a,b[$. Alors :

1. Les intégrales généralisées $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ sont de même nature ;
2. Si elles convergent, on a alors

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Démonstration. On utilise simplement Chasles usuelle puis on passe à la limite suivant la définition. □

Remarque. *Je vous laisse le soin d'adapter toutes les propositions au cas de fonctions* $f :]a,b] \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

Proposition 3 (Linéarité)

Soient f et g continues par morceaux sur $[a,b[$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ convergent, alors

1. $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))dt$ converge ;
2. $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt.$

Remarque. ***Attention !*** *La réciproque est fausse ! Il est tout à fait possible que* $\int (f+g)(t)dt$ *converge mais que* $\int f(t)dt$ *et* $\int g(t)dt$ *divergent toutes deux.*

Proposition 4 (Positivité)

Soient f et g continues par morceaux sur $[a,b[$ ayant une intégrale convergente. Alors :

1. Si $f \leq g$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.
2. Cas particulier important : si $f \geq 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \geq 0$.

Exercice (2) : Étudier la convergence et calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}.$$

Le critère suivant est un peu plus avancé, mais est utile dans les démonstrations.

Proposition 5 (Critère de Cauchy)

Soit f continue par morceaux sur $[a, b[$. Alors :

$$\int_a^b f(t)dt \text{ converge } \iff \forall \varepsilon > 0, \quad \exists M \in [a, b[, \left(u, v \geq M \implies \left| \int_u^v f(t)dt \right| < \varepsilon \right).$$

2 Cas des fonctions positives

Dans cette partie, on suppose que f est à valeurs dans $[0, +\infty]$ (f positive). On note $f \geq 0$.

Remarque. *Si f définie sur $[a, b[$ est positive, alors $x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$ est une fonction croissante de x.*

2.1 Théorèmes de comparaison

Une manière efficace d'étudier des intégrales généralisées est de les comparer avec des intégrales dont le comportement est connu.

Proposition 6

Soit $f : [a, b[\longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ positive et continue par morceaux. Alors :

$$\int_a^b f(t)dt \text{ converge } \iff \exists M \geq 0, \quad \forall x \in [a, b[, \quad \int_a^x f(t)dt \leq M.$$

Démonstration. ($\Rightarrow$) Supposons que $\int_a^b f(t)dt$ converge pour $x \in [a, b[$. On a alors $\forall y \in]x, b[$:

$$\int_a^y f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^y f(t)dt \geq \int_a^x f(t)dt.$$

Ainsi,

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{y \to b^-} \int_a^y f(t)dt \geq \int_a^x f(t)dt.$$

Donc $M := \int_a^b f(t)dt$ convient.

($\Leftarrow$) Supposons qu'il existe M tel que $\int_a^x f(t)dt \leq M$ $\forall x \in [a, b[$. Posons

$$M_s := \sup_{x \in [a,b[} \left(\int_a^x f(t)dt \right).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $c \in [a, x[$ tel que $M_s - \varepsilon < \int_a^c f(t)dt$. Alors, $\forall x \in [c, b[$,

$$M_s - \varepsilon < \int_a^c f(t)dt \leq \int_a^x f(t)dt \leq M_s.$$

Ainsi, $\int_a^x f(t)dt$ converge vers M_s.

□

Théorème 7

Soient f et g continues par morceaux sur $[a,b[$ positives. Supposons qu'il existe $M \in [a,b[$ tel que pour tout $t \in [M,b[$, on ait $f(t) \leq g(t)$. Alors :

1. Si $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge.
2. Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ diverge, alors $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ diverge.

Démonstration. Pour tout $x \leq M$,

$$\int_M^x f(t)dt \leq \int_M^x g(t)dt.$$

Ainsi, si $\int_a^b g(t)dt$ converge, alors $\int_M^x f(t)dt$ est croissante et majorée par la quantité $\int_a^b g(t)dt$. L'autre point est similaire. □

(On verra des exemples plus tard dans la liste des intégrales de référence à connaître)

2.2 Intégrales de références

Il est indispensable de maîtriser un certain nombre d'intégrales de référence afin de pouvoir utiliser les résultats de la partie précédente. On va en lister quelques-unes.

2.2.1 Intégrales de Riemann

Une intégrale de Riemann est une intégrale de la forme

$$\int \frac{1}{t^\alpha}, \qquad \alpha > 0.$$

On distingue deux cas, selon qu'on intègre sur $[1,+\infty[$ ou bien sur $[0,1]$.

Proposition 8

- Si $\alpha > 1$, alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt$ converge ;
- Si $\alpha \leq 1$, alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt$ diverge.

Démonstration. 1. Si $\alpha = 1$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt = \lim_{x\to+\infty} [\ln(t)]_1^x = +\infty.$$

2. Si $\alpha \neq 1$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}\right]_1^x = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1-\alpha)}\right).$$

Alors, si $\alpha > 1$, $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right) = 0$, et si $\alpha \leq 1$, $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right) = +\infty$.

□

Proposition 9

- Si $\alpha < 1$, alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge ;
- Si $\alpha \geq 1$, alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ diverge.

Démonstration. 1. Si $\alpha = 1$, on a déjà vu (exercice (1)) que $\int_0^1 \frac{1}{t} dt$ diverge ;

2. Si $\alpha \neq 1$, alors, pour $x \in [0, 1[$,

$$\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha} dt = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_x^1 = \frac{1 - x^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

□

2.2.2 Fonctions $t \longmapsto t^\alpha e^{-t}$:

Ce résultat vient en application du théorème de comparaison "$\leq$".

Proposition 10

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \text{ l'intégrale } \int_1^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt \text{ converge.}$$

Démonstration. Écrivons subtilement $t^\alpha e^{-t} = t^\alpha e^{-t/2} e^{-t/2}$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $\lim_{t \to +\infty} (t^\alpha e^{-t/2}) = 0$, donc il existe $A > 1$ tel que $t^\alpha e^{-t/2} \leq 1$ $\forall t \geq A$ (rappel : $t \geq 1$). En multipliant par $e^{-t/2}$, on obtient que $t^\alpha e^{-t} \leq e^{-t/2}$ $\forall t \geq A$. Or, un calcul direct montre que $\int_1^{+\infty} e^{-t/2} dt$ converge :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_1^x e^{-t/2} dt = 2e^{-1/2}.$$

Par théorème de comparaison, on obtient le résultat. □

2.2.3 Fonctions $t \longmapsto e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$:

Proposition 11

Soit $\lambda > 0$. Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt$ converge.

Démonstration. La preuve se résume à un calcul direct et vous est laissée à titre d'exercice. □

Remarque. *Si le paramètre λ est complexe, alors on peut montrer que*

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt \textit{ converge } \iff \Re(\lambda) > 0.$$

($\Re$ désigne la partie réelle).

3 Intégrales de fonctions de signe quelconque

On sait maintenant étudier les intégrales généralisées de fonctions positives. l'idée de cette partie et d'utiliser ce qu'on a déjà établi pour parvenir à étudier des intégrales généralisées de fonctions de signe quelconque. On a *a priori* de nombreux comportements possibles pour de telles intégrales : elles peuvent avoir une limite finie, diverger vers $+\infty$ ou $-\infty$, osciller entre deux valeurs etc...

Définition 12

Soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est **absolument convergente** si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$ converge.

Le résultat essentiel suivant permet de ramener l'étude d'intégrales de fonctions quelconque au cas des fonctions positives :

Proposition 13

Si $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

Démonstration. La preuve utilise le critère de Cauchy que l'on a introduit plus tôt. Supposons que $\int_a^b f(t)dt$ soit absolument convergente, c'est à dire que $\int_a^b |f(t)|dt$ converge. Par le critère de Cauchy,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists M \in [a, b[\text{ tel que } \left(u, v \geq M \Longrightarrow \left| \int_u^v f(t)dt \right| < \varepsilon \right).$$

Or,

$$\left| \int_u^v f(t)dt \right| \leq \int_u^v |f(t)|\, dt \leq \varepsilon.$$

Ainsi, $\int_u^v f(t)dt$ converge $\forall u, v \in [M, b[$, donc $\int_a^b f(t)dt$ converge. □

Exemple : L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}dt$ converge, car $\left|\frac{\sin(t)}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$. Or, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge, donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}dt$ est absolument convergente, donc convergente.

Définition 14

Une intégrale est dite **semi-convergente** si elle est convergente, mais pas absolument convergente.

Exemple : (voir feuille TD pour les calculs :)

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt \text{ est semi-convergente.}$$

Le théorème suivant fournit un critère suffisant de convergence.

Théorème 15 (Théorème d'Abel)

On suppose avoir :

- f de classe C^1 sur $[a, b[$, positive, décroissante, de limite nulle en $+\infty$;
- g continue sur $[a, b[$, telle que $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ soit bornée.

Alors :

$$\int_a^b f(t)g(t)dt \text{ converge.}$$

Démonstration. voir Dantzer 14.12. □

On dispose aussi des théorèmes de changements de variables et d'intégration par parties : pour les preuves, voir (par exemple) Dantzer 14.13 et 14.14.

Proposition 16 (Intégration par parties)

Soient $f, g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1.

1. Si $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow b}(f(x)g(x))$ existe, alors $\displaystyle\int_a^b f'(t)g(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)dt$ sont de même nature.
2. Si ces intégrales convergent, on a la formule :

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = \lim_{x \longrightarrow b} (f(x)g(x) - f(a)g(a)) - \int_a^b f'(t)g(t)dt.$$

Proposition 17 (Changement de variables)

Soient $u : [a, b[\longrightarrow [\alpha, \beta[$ une bijection de classe C^1 strictement croissante et $f : [\alpha, \beta[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux. Alors

$$\int_a^b u'(t) f \circ u(t)dt \text{ et } \int_\alpha^\beta f(t)dt$$

sont de même nature, et si elles convergent, alors elles sont égales.

4 Comparaison série / intégrale

Dans cette dernière partie, on va relier les notions de séries numériques et d'intégrales généralisées. La comparaison série / intégrale est un outil très utile : on peut, en appliquant le théorème suivant, démontrer que $\sum \frac{1}{n}$ diverge et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge grâce au résultat analogue sur les intégrales !

Théorème 18

Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ une fonction **décroissante positive**. Alors la série $\sum f(k)$ est de même nature que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$.

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme f décroît, on a

$$k \leq t \leq k+1 \Longrightarrow f(k+1) \leq f(t) \leq f(k).$$

On a clairement

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k).$$

En sommant, on trouve

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k+1) \leq \int_0^n f(t)dt \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(k).$$

- Si la série converge, on a alors, pour x positif :

$$\int_0^x f(t)dt \leq \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor +1} f(k) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} f(k), \quad \text{(car } f \text{ positive)}$$

  dont l'intégrale est convergente.
- Si l'intégrale converge, alors il existe $M > 0$ tel que

$$\int_0^n f(t)dt \leq M,$$

  donc la suite des sommes partielles est majorée, donc la série converge.

□

On verra de nombreux exemples dans le TD. Vous pouvez aussi regarder $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^2}$ qu'on a cité en introduction.

TD 5 : Intégrales généralisées

Exercice 1

Faire les exercices (1) et (2) du cours et étudier la convergence des intégrales généralisées suivantes :

$$\int_1^\infty x^\alpha dx; \quad \int_0^1 x^\alpha dx; \quad \int_0^\infty e^{-x^\beta} dx; \quad .$$

(discuter selon la valeur des paramètres)

Exercice 2 (Intégrale de Gauss)

L'objectif de ce problème est d'étudier l'intégrale de Gauss, qui est très importante en probabilités et en statistiques. Elle est définie pour $a > 0$ par :

$$I(a) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} dt.$$

On considère la fonction $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto t^2 e^{-t^2}$.

1. Dresser le tableau de variations de h sur $[0, +\infty[$.
2. Déduire l'inégalité pour $t > 0$:

$$0 \leq e^{-t^2} \leq \frac{1}{et^2}.$$

3. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge.
4. En déduire que l'intégrale $I(1)$ est convergente.
5. Soit $a > 0$. Par un changement de variables, montrer que $I(a)$ converge également et qu'elle vérifie

$$I(a) = \frac{I(1)}{\sqrt{a}}.$$

Exercice 3 (Une intégrale semi-convergente classique)

1. Montrer par une intégration par parties que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \quad \text{converge.}$$

2. Montrer que pour tout $t \geq 1$, on a l'inégalité $\frac{|\sin(t)|}{t} \geq \frac{1-\cos(2t)}{2t}$.
3. Déduire de la question précédente et d'une intégration par parties que l'intégrale de la question 1 ne converge pas absolument.

Exercice 4 (La fonction Gamma)

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$: $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$.

1. Montrer que l'intégrale qui définit $\Gamma(\alpha)$ converge quel que soit $\alpha > 0$.
2. Montrer que $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.
3. Montrer que $\Gamma(n + 1) = n!$
4. Montrer que $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Exercice 5 (Comparaison série / intégrale)

Étudier la convergence des séries suivantes en les comparant avec les intégrales généralisées associées :

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$; 2. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$; 3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\epsilon}}$ avec $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$;
4. $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ln(k)}$; 5. $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln(k))^{1+\epsilon}}$; 6. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$.